

	TOPOGRAFIA I	
	Aula teórica 06: Introdução à teoria dos erros	
	Prof. Dr. Alexandre Bernardino Lopes	

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS ERROS

Conteúdo em vídeos

Parte 1 - <https://www.youtube.com/watch?v=I2ptgXkbbkVc&feature=youtu.be>

Parte 2 - <https://www.youtube.com/watch?v=tdRIKnOHZyo&feature=youtu.be>

Parte 3 - <https://www.youtube.com/watch?v=ILlFjfNdxWs&feature=youtu.be>

Parte 4 - <https://www.youtube.com/watch?v=QmRILrfhjbo&feature=youtu.be>

Introdução.

Na topografia trabalha-se com medições, cujos valores exatos não podem ser determinados, pois pode-se dizer que os erros são inerentes às medidas, ou seja, admite-se que as observações estão sujeitas a variações aleatórias. Assim, é necessário que estes erros tenham um tratamento matemático adequado alicerçado em ferramentas estatísticas.

Nesta aula será feita uma breve revisão de conceitos estatísticos fundamentais, entretanto recomenda-se que o leitor faça uma revisão mais aprofundada em tópicos como probabilidade, distribuição normal, média, desvio padrão, variância, covariância e lei de propagação dos erros. Também será estudado o conceito de precisão e exatidão, erros grosseiros aleatórios e sistemáticos e noção de propagação de erros e propagação de variâncias.

No campo da Topografia e Geodésia trabalha-se com o ajustamento de observações, que é um ramo da matemática aplicada que, segundo DALMOLIN & SANTOS, 2014 tem por objetivo “*a obtenção de solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações lineares é inconsistente*” (neste caso o sistema apresenta mais equações que o número de incógnitas). Para aprofundar no tema Ajustamento de Observações recomenda-se a leitura do livro: *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas* de autoria de Camil Gemaél.

Exatidão e precisão

Qual a diferença entre exatidão e precisão ?

- Exatidão ou acurácia – Denota o quanto uma determinada medida está próximo de um valor verdadeiro;
- Precisão - É o grau de refinamento em que uma quantidade é medida. Por exemplo, quando medimos “*n*” vezes uma quantidade e os valores medidos são próximos, temos boa precisão, ou seja, o quanto uma medida está próximo da média.

Nota-se que o fato de uma medida ser precisa, não necessariamente significa que esta é exata.

Na Figura 01 podemos entender claramente a diferença entre precisão e acurácia ou exatidão.

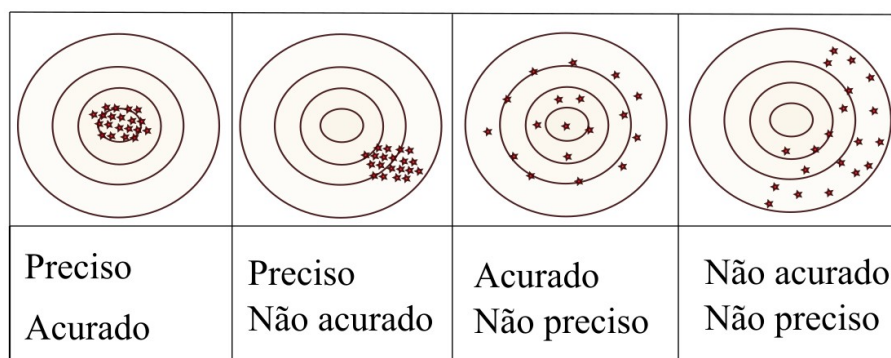


Figura 01 – Diferença entre acurácia e precisão.

No caso da Topografia e Geodésia busca-se boa precisão e boa acurácia nas medições, ou seja, busca-se minimizar nas medidas os efeitos aleatórios ou a dispersão em torno da média e o grau de afastamento em relação ao valor verdadeiro.

Erros Grosseiros, aleatórios e sistemáticos.

Erro grosseiro

O erro grosseiro pode ocorrer em um erro de leitura accidental ou uma anotação errada. Geralmente os valores com erros grosseiros destoam-se muito dos demais e são identificados com mais facilidade.

Erro Sistemático

O erro sistemático se repete em condições constantes. Estes erros causam um efeito acumulativo nas observações. Eles podem ser causados por equipamentos descalibrados. Um exemplo prático que causa um erro sistemático é a utilização de uma trena mais curta ou mais longa do que consta em sua graduação.

Outro exemplo é o erro de paralaxe na leitura de um instrumento analógico causado pelo não alinhamento entre o olho do operador, indicador da leitura e escala do instrumento (VUOLO, 1992).

Erro Aleatório

Os erros aleatórios podem ser causado por vários fatores oriundos das imperfeições humanas, instrumentais e ambientais. Podemos exemplificar como fonte de erros aleatórios a estimativa na leitura de uma régua, centragem do equipamento no ponto, inclinação da baliza, lente que dificulta a leitura e até mesmo condições ambientais como a reverberação que dificulta muito a leitura de réguas topográficas em campo.

Estes erros podem ser tratados estatisticamente.

A Figura 02 exemplifica como que em uma leitura de régua pode ocorrer o erro aleatório. Ao realizar a leitura do fio médio neste caso, qual é a leitura correta? Se perguntássemos para 10 pessoas teríamos respostas como: 1.11 m, 1.12 m, 1.13 m... Para se trabalhar esta incerteza podemos utilizar a média das “*n*” leituras que é o valor mais provável.

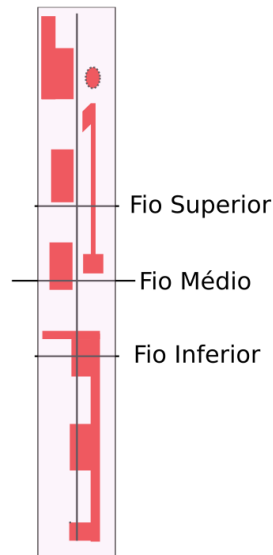


Figura 02 – Exemplo de erro aleatório.

Conceitos básicos de estatística

Neste tópico vamos rever apenas conceitos básicos de estatística que serão usados na lei de propagação de covariâncias.

Esperança matemática de uma variável aleatória

Podemos definir esperança matemática como o valor médio ou valor esperado. Considerando uma variável aleatória discreta define-se esperança matemática (E) como:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * p(x_i) \quad (1)$$

A expressão (1) é uma média aritmética ponderada, onde x é uma variável aleatória discreta e $p(x_i)$

Variância

A variância (VAR) é uma medida que define o grau de dispersão ou de concentração de probabilidade em torno da média. Matematicamente a variância pode ser expressa por (MORETTIN, 2010):

$$\sigma^2 = VAR(x) = E\left((X - E(x))^2\right) \quad (2)$$

Desenvolvendo a expressão (2) resulta:

$$VAR(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \quad (3)$$

Desvio Padrão

O desvio padrão (σ) é expresso por:

$$\sigma = \sqrt{VAR(x)} \quad (4)$$

Covariância

A covariância exprime o grau de dependência entre duas variáveis x e y . Matematicamente a covariância é expressa por:

$$\sigma_{xy} = COV(x, y) = E((x - E(x)) * (y - E(y))) \quad (5)$$

Quando as componentes x e y são estatisticamente independentes a covariância σ_{xy} é nula (GEMAEL, 2015).

Erro padrão da média

O erro padrão da média é dado por:

$$\sigma_m = \frac{\bar{x} \sigma}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

onde n é uma amostra de uma população.

Demais tópicos importantes a serem pesquisados

É importante que o leitor faça uma revisão de conceitos importantes de estatística, assim sugere-se alguns tópicos e sugestões de materiais para consultas:

1. Curva de probabilidade – Pág. 18 do livro: MCCORMAC, J. Topografia. 5º Edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2010;
2. Probabilidade e inferência – Livro: MORETTIN, L. G. - Estatística básica: probabilidade e inferência, volume único. São Paulo: Pearson; c2010;
3. Ajustamento – Livro: GEMAEL C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. 2.ed. Curitiba: ED.UFPR; 2015;
4. Teoria dos Erros – Livro: VUOLO J. H. Fundamentos da teoria de erros. São Paulo: Blucher; 1992.

Também recomenda-se utilizar plataformas digitais:

<https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability>

<https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability/probability-library>

Propagação de erros

Na topografia as grandezas medidas em campo são usadas para se determinar outras grandezas, como os ângulos e as distâncias medidas em campo, usados no cálculo de coordenadas. Neste caso temos que entender como os erros nas medidas se propagam para as grandezas calculadas.

Para entendermos a relação entre o erro das medidas e das grandezas calculadas serão apresentados o caso da função linear, da função não linear (caso da parábola) e a solução em casos de outras funções não lineares. Este estudo da propagação dos erros são detalhados em MIKHAIL & GRACIE, 1981

Função linear

A Figura 03 mostra a relação, no caso de uma função linear, entre a medida e a grandeza a ser calculada.

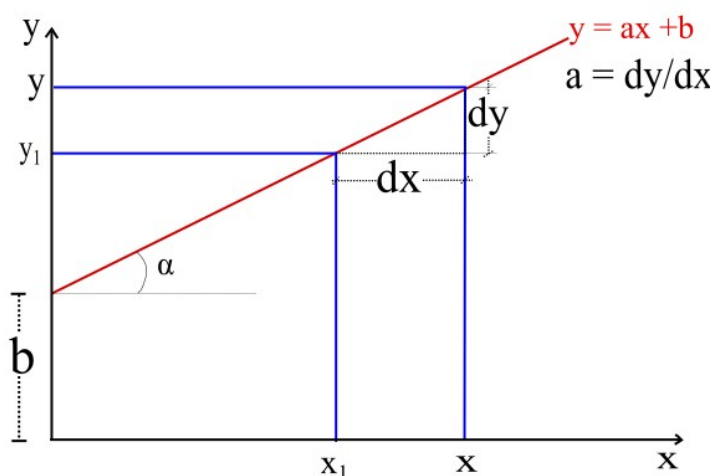


Figura 03 – Propagação de erro, caso da função linear.
(Fonte: Adaptada de MIKHAIL & GRACIE, 1981)

Na figura 03 temos as seguintes grandezas:

- x_1 – Valor medido;
- x – Valor verdadeiro;
- y_1 – Valor calculado em função da medida x_1 ;
- y – Valor calculado em função da medida x ;
- dx – Erro do valor medido ($x - x_1$);
- dy – Erro do valor calculado ($y - y_1$);

Uma função linear é definida matematicamente por :

$$y = ax + b$$

(7)

e a inclinação (α) da reta é dada por:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{dy}{dx} \quad (8)$$

também podem encontrar o valor de a derivando a equação (7):

$$a = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (9)$$

igualando a equação (8) e (9) temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} \rightarrow dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) * dx \quad (10)$$

ou seja, a equação (10) é o erro da grandeza calculada em função do erro de grandeza medida.

Função não linear – caso da parábola.

No caso da parábola temos as seguintes relações (Figura 04).

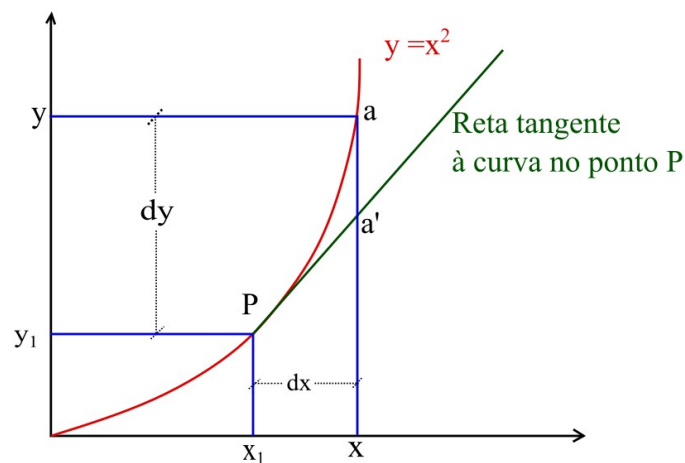


Figura 04– Propagação de erro, caso da parábola.
(Fonte: Adaptada de MIKHAIL & GRACIE, 1981)

Na Figura 04 temos as seguintes grandezas:

- x_1 – Valor medido;
- x – Valor verdadeiro;
- y_1 – Valor calculado em função da medida x_1 ;
- y – Valor calculado em função da medida x ;
- dx – Erro do valor medido ($x - x_1$);
- dy – Erro do valor calculado ($y - y_1$);
- Ponto P – Ponto de tangência.

A parábola da Figura 04 é definida por, considerando o valor medido e o valor verdadeiro:

$$y = x^2 \quad y_1 = x_1^2 \quad (11)$$

Também temos as seguintes relações:

$$x = x_1 + dx \quad (12)$$

$$y = y_1 + dy \quad (13)$$

Substituindo a equação (12) na equação (11):

$$y = (x_1 + dx)^2 \quad (14)$$

Desenvolvendo a equação (14) e substituindo a equação (11) :

$$y_1 + dy = x_1^2 + 2 x_1 dx + dx^2 \text{ mas } y_1 = x_1^2, \text{ então:}$$

$$x_1^2 + dy = x_1^2 + 2 x_1 dx + dx^2 \rightarrow dy = 2 x_1 dx + dx^2 \quad (15)$$

Entretanto a derivada da equação $y_1 = x_1^2$ é:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = 2 x_1 \quad (16)$$

Substituindo a equação (16) na equação (15):

$$dy = \frac{\partial y_1}{\partial x} dx + dx^2 \quad (17)$$

Geralmente, na equação (17) o termo dx^2 pode ser desprezado por ser muito pequeno.

Funções não lineares – linearização

Anteriormente foi demonstrado a propagação do erro nos casos de funções lineares, onde não houve nenhuma aproximação.

No caso da função definida por uma parábola ($y=x^2$) o termo dx^2 pode ser desprezado, neste caso temos uma aproximação na determinação do erro da grandeza calculada.

De acordo com MIKHAIL & GRACIE, 1981 há uma alternativa quando se trata de outras funções não lineares que é a linearização da função. Após esta linearização aplica-se a lei de propagação na forma linearizada da função original. A base para a linearização de uma função é a expansão em série de Taylor.

Considerando a Figura 05 e sendo $y = f(t)$, quando $t=x$ e $x=a$, a forma linearizada é dada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a) * \left(\frac{x-a}{1!} \right) + f''(a) * \left(\frac{(x-a)^2}{2!} \right) + \dots \quad (18)$$

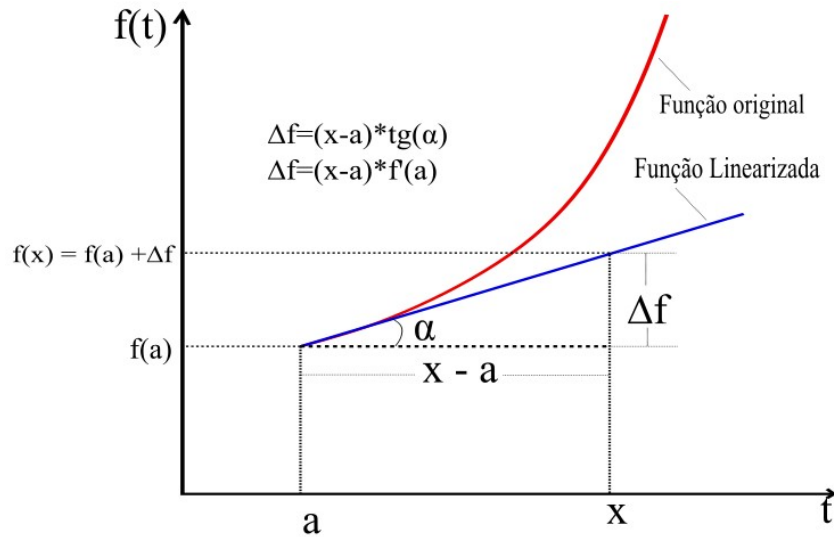


Figura 05 – Linearização de uma função
(fonte : adaptada de GEMAEL, 2015)

Na prática, para valores de x próximos de a as potências igual e superiores à segunda ordem podem ser negligenciadas, ou seja, nas proximidades de a , a curva da função original pode se substituída por uma reta (GEMAEL, 2015).

Através da Figura 05 verifica-se facilmente que:

$$tg(\alpha) = \frac{\Delta f}{x-a} \rightarrow \Delta f = tg(\alpha) * (x-a) \quad (19)$$

mas $tg(\alpha) = f'(a)$ é o coeficiente angular da reta em $x=a$, então:

$$\Delta f = f'(a) * (x-a) \quad (20)$$

Como:

$$f(x) = f(a) + \Delta f \text{ temos que}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a) * (x-a) \quad (21)$$

Podemos observar que a equação (21) equivale a equação (18) negligenciando as potências igual e superiores à segunda ordem.

A Matriz Variância-Covariância (MCV)

A Matriz Variância-Covariância (MVC) exprime a covariância entre n variáveis. Matematicamente a MVC (Σ_{xy}) é expressa por:

$$\Sigma_X = \begin{vmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \dots & \sigma_{x1xn} \\ \sigma_{x2x1} & \sigma_{x2}^2 & \dots & \sigma_{x2xn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{xmx1} & \sigma_{xmx2} & \dots & \sigma_{xnx}^2 \end{vmatrix} \quad (22)$$

Como pode ser observado a MVC é uma matriz quadrada, simétrica, onde as variâncias estão na diagonal e as covariâncias são os demais termos. É importante lembrarmos que a variância é um caso particular da covariância, no caso das componentes do vetor x serem independentes entre si, temos que $\sigma_{xixj}=0$ e a matriz Σ_{xy} torna-se matriz diagonal (GEMAEL, 2015).

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Lei da propagação de covariâncias

A lei da propagação de covariância permite obter a Matriz Variância Covariância (MVC) da variável dependente y em função da MVC da variável x .

Aplicando o operador $E\{\}$ em uma função $y = Ax + C$ temos:

$$\begin{aligned} E(y) &= E(Ax + C) \\ E(y) &= E(Ax) + E(C) \\ E(y) &= AE(x) + (C) = \mu \end{aligned} \quad (24)$$

A MVC para y é definida (GEMAEL, 2015):

$$\Sigma_y = E\{(y - \mu) * (y - \mu)^t\} \quad (25)$$

Podemos verificar que, caso de termos um vetor coluna para $y - \mu_y$, a covariância é dada por este termo multiplicada pela sua transposta.

Substituindo a expressão $y = Ax + C$ e $E(y) = AE(x) + (C) = \mu$ na expressão (25) temos:

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= E\{[Ax + C - AE(x) - C] * [Ax + C - AE(x) - C]^t\} \\ \Sigma_y &= E\{[Ax - AE(x)] * [Ax - AE(x)]^t\} \\ \Sigma_y &= E\{[A(x - E(x))] * [A(x - E(x))]^t\}, \text{ mas } \mu_x = E\{(x)\}, \text{ então:} \\ \Sigma_y &= E\{[A(x - \mu_x)] * [A(x - \mu_x)]^t\} \\ \Sigma_y &= A E\{(x - \mu_x) * (x - \mu_x)^t\} A^t \end{aligned} \quad (26)$$

Observando a expressão (26) e a expressão (25) podemos reescrever a expressão (26):

$$\Sigma y = A \Sigma_x A^t \quad (27)$$

A equação acima, mostrada para o caso linear, pode ser generalizada para o caso de dependência não linear $F(X)$, basta verificarmos a expressão (21). Assim podemos definir para o caso não linear a expressão:

$$\Sigma y = D \Sigma_x D^t \quad (28)$$

onde D é a matriz definida pelas derivadas da função $F(X)$ em função das variáveis independentes.

Definição de erro Aparente; erro verdadeiro e resíduo

Sendo μ o valor verdadeiro de uma medida e x_i os valores observados, temos:

Erro verdadeiro:

$$\varepsilon_v = x_i - \mu \quad (29)$$

Erro aparente:

$$\varepsilon_a = x_i - \bar{x} \quad (30)$$

Resíduo:

$$v_i = \bar{x} - x_i \quad (31)$$

Exercícios

1) Foi realizado dez medidas de ângulos conforme tabela abaixo, com os dados pede-se:

- O valor mais provável do ângulo;
- A variância e o desvio padrão;

16°23'23"	16°23'22"
16°23'24"	16°23'23"
16°23'25"	16°23'24"
16°23'23"	16°23'23"
16°23'24"	16°23'25"

Solução

a) O valor mais provável do é a esperança matemática ou a média definida por:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * p(x_i)$$

No caso deste exercício basta multiplicar cada valor do ângulo (x_i) por $p_i = 1/10$ (visto que são 10 observações), e somar os resultados desta multiplicação.

Determinação do valor esperado ou média										
Observação em graus decimais	16,3897222	16,3900000	16,3902778	16,3897222	16,3900000	16,3894444	16,3897222	16,3900000	16,3897222	16,3902778
Probabilidade	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	1,63897222222222	1,639	1,639027778	1,638972222	1,639	1,638944444444	1,63897222	1,639	1,63897222222222	1,639027777778
$E(X) = \mu = \sum x_i * p_i$	16,3898888888889									
Média em GMS	16°23'23,6"									

Resposta: $\mu = 16^\circ 23' 23,6''$

b) A variância é dada por:

$$VAR(x) = \sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

E o desvio padrão é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Os resultados dos cálculos são apresentados na tabela que segue.

Determinação da variância e desvio padrão										
x^2	268,622994521604	268,6321	268,6412056	268,6229945	268,6321	268,6138891975	268,622995	268,6321	268,622994521604	268,6412056327
Probabilidade	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$x_i^2 * p_i$	26,8622994521605	26,86321	26,86412056	26,86229945	26,86321	26,86138891975	26,8622995	26,86321	26,8622994521605	26,86412056327
$E(x^2) = \mu = \sum x_i^2 * p_i$	268,628457854938									
$[E(x)]^2$	268,628457790123									
$VAR = E(x^2) - [E(x)]^2$	6,48149125482E-08									
Variância em segundos DEG	0,000233333685173									
Para ter a variância em segundos, basta multiplicar a variância do ângulo em graus por 3600										
Variância (segundos)	0,84"									
Desvio Padrão (segundos)	0,92"									

Resposta: $\sigma^2 = 0,84''$ e $\sigma = 0,92''$

2) Aplique a lei de propagação de covariâncias e mostre a equação que determina a variância da área (σ_A) de um terreno retangular de lado x e y, dado os desvios padrões σ_x e σ_y .

Solução:

A área é dada por $A = x * y$ e a lei de propagação de variância dada por $\sigma_A^2 = \Sigma_A = D \Sigma_{x,y} D^t$.

Neste caso temos que montar a matriz D e a matriz MVC, lembrando que a matriz D é dada pela derivada da função $A = x * y$ em função das variáveis independentes x e y. Assim:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \end{vmatrix} e$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y \quad e \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x$$

$$D = \begin{vmatrix} y & x \end{vmatrix}$$

No caso de observações independentes a MVC é expressa por:

$$\Sigma_{(x,y)} = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$$

Substituindo as matrizes D e Σ_A na equação $\sigma_A^2 = \Sigma_A = D \Sigma_{x,y} D^t$ temos:

$$\sigma_A^2 = \Sigma_A = D \Sigma_{x,y} D^t$$

$$\sigma_A^2 = \begin{vmatrix} y & x \\ \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix}$$

3) Considere o exercício anterior e determine a precisão da área de um terreno retangular de que mede $x=50$ metros de testada e $y=60$ metros de frente aos fundos. O desvio determinado para cada medida foi de $\sigma_x=0,2$ e $\sigma_y=0,3$, respectivamente.

Solução:

Considerando a equação mostrada no exercício anterior temos:

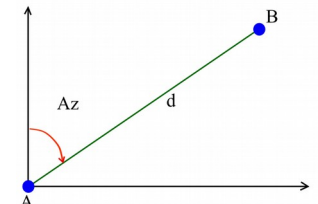
$$\sigma_A^2 = \begin{vmatrix} y & x \\ \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix} \rightarrow \sigma_A^2 = \begin{vmatrix} 60 & 50 \\ 0,2^2 & 0 \\ 0 & 0,3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 60 \\ 50 \end{vmatrix}$$

Para facilitar os cálculos com matriz podemos usar o *OCTAVE* (<https://www.gnu.org/software/octave/>):

```
%%%%% Determinação da precisão da área de um terreno retangular.
clear all;
close all;
format long;
disp('***ESTE PROGRAMA A PRECISAO DA ÁREA DE UM TERRENO RETANGULAR DADO OS DESVIOS
PADROES***');
disp('-----');
disp(' Dados para Calculo de area de secao ')
x = input('Entre o com o valor de x ---');
y = input('Entre o com o valor de y ---');
DPx = input('Entre o com o valor do desvio padrão de x ---');
DPy = input('Entre o com o valor do desvio padrão de y ---');
%%%%%% A = x*y
%%%%%% dA/dx = y e Da/dx = x
A = [y x];
At = A';
MVC = [ DPx^2 0
        0    DPy^2];
VARarea = A*MVC*At %%%%% variância da área.
DP = sqrt(VARarea) %%%%% desvio padrão
```

Resposta: $\sigma_A^2 = 369 \text{ m}^4$ $\sigma_A = 19,21 \text{ m}^2$

4) Para se determinar as coordenadas de um ponto **B** (X_B e Y_B) a partir de um ponto **A** com coordenadas conhecidas e ajustadas (X_A e Y_A) foram medidos a partir deste ponto a distância e o azimuth. Conhecendo os respectivos desvios padrões destas medidas, conforme tabela que segue, determine o desvio padrão das coordenadas do ponto **B** (σ_x e σ_y).

		Distância (m)	Azimuth
	Valor medido	500	30
	Desvio padrão	0,02 m	10"

Solução

1º Passo: Identificar as equações.

As coordenadas de um ponto **B** (X_B e Y_B) a partir de um ponto **A** com coordenadas conhecidas e ajustadas (X_A e Y_A), medindo-se o azimuth do alinhamento **AB** e a distância entre os referidos pontos são dadas por:

$$X_B = X_A + d * \sin(Az)$$

$$Y_B = Y_A + d * \cos(Az)$$

2º Passo: Montar a matriz dos coeficientes (D).

Neste caso deve ser determinada as derivadas das equações que determinam o valor de X_B e Y_B com relação as variáveis d e Az . Assim:

$$\frac{\delta X_B}{\delta d} = \sin(Az) \quad \frac{\delta X_B}{\delta Az} = d * \cos(Az)$$

$$\frac{\delta Y_B}{\delta d} = \cos(Az) \quad \frac{\delta Y_B}{\delta Az} = d * -\sin(Az)$$

3º Passo: Calcular o desvio padrão através de: $\Sigma_{X_B, Y_B} = D \Sigma_{d, Az} D^T$

$$\Sigma_{X_B, Y_B} = \begin{vmatrix} \frac{\delta X_B}{\delta d} = \sin(Az) & \frac{\delta X_B}{\delta Az} = d * \cos(Az) \\ \frac{\delta Y_B}{\delta d} = \cos(Az) & \frac{\delta Y_B}{\delta Az} = d * -\sin(Az) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{Az}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\delta X_B}{\delta d} = \sin(Az) & \frac{\delta X_B}{\delta Az} = d * \cos(Az) \\ \frac{\delta Y_B}{\delta d} = \cos(Az) & \frac{\delta Y_B}{\delta Az} = d * -\sin(Az) \end{vmatrix}^T$$

Lembrando que o desvio padrão é dado pela raiz quadrada da diagonal principal da matriz Σ_{X_B, Y_B} .

Também deve se ter cuidado com a entrada no valor do azimuth e do respectivo desvio padrão, estes devem estar em graus decimais e em radianos.

Para facilitar os cálculos com matriz pode ser utilizado o *OCTAVE*, conforme código abaixo:

```
%%%%%%%%%%%%% determinação do desvio padrão de coordenadas de um ponto;
clear all;
close all;
format long;
pkg load symbolic %%%%%%%%%% carrega o pacote de cálculos simbólicos
disp(' ***ESTE PROGRAMA DETERMINA OS DESVIOS PADRÕES DAS COORDENADAS DE UM PONTO B A
PARTIR DE UM PONTO A***');
%%%%%%%%% Entrada de variáveis
d1 = input('Entre o com o valor da distancia entre os pontos em metros ---');
az = input('Entre o com o valor do azimute em graus decimais---');
az1 = (az*pi)/180;
DPd = input('Entre o com o valor do desvio padrão da distancia em metros ---');
DPaz = input('Entre o com o valor do desvio padrão do azimute em segundos ---');
DPaz1 = (((DPaz/3600)*pi)/180); %%%% transformando o desvio padrão do azimute em grau e em radianos
%%%%%%%%% declaração de variáveis simbólicas
syms d;
syms az;
syms XA;
syms YA;
XB = XA+d*sin(az);
YB = YA+d*cos(az);
dxd = diff( XB , d , 1 ); %%% derivada de XB em relação a d
dxaz = diff( XB , az , 1 ); %%% derivada de XB em relação a az
dyd = diff( YB , d , 1 ); %%% derivada de YB em relação a d
dyaz = diff( YB , az , 1 ); %%% derivada de YB em relação a az
D = [ subs((dxd),az,az1) subs(dxaz,{d,az},{d1,az1})
      subs((dyd),az,az1) subs(dyaz,{d,az},{d1,az1}) ];
D1=double(D);
DT = D1';
mvc = [ DPd^2 0
        0 DPaz1^2];
MVC = D1*mvc*DT;
disp(' ');
disp(' -----:');
disp(' O DESVIO PADRÃO DA COORDENADA X DE B EM METROS É:');
DPXB = sqrt(MVC(1,1)) %%%%%%%%% desvio padrão da coordenada X do ponto B
disp(' -----:');
disp(' O DESVIO PADRÃO DA COORDENADA Y DE BEM METROS É:');
DPYB = sqrt(MVC(2,2)) %%%%%%%%% desvio padrão da coordenada y do ponto B
```

Como a rotina envolve diferenciação de funções (comando *diff*) pode ser necessário a instalação de um pacote no OCTAVE chamado *Octave Symbolic Package*. Este pacote pode se encontrado no *site*: <https://octave.sourceforge.io/symbolic/>.

Todos os cálculos podem ser realizados de outras formas.

Após executar a rotina obteve-se os seguintes resultados:

Resposta: $\sigma_{XB} = 0,023 \text{ m}$, $\sigma_{YB} = 0,021 \text{ m}$

Bibliografia

DALMOLIN Q; SANTOS, D. R. Ajustamento de observações para geotecnologias. 2. ed Curitiba: UFPR; 2014.

DALMOLIN Q. Ajustamento por mínimos quadrados. Curitiba: [s.n.]; 2002.

GEMAEL C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicação geodésicas. 2.ed. Curitiba: ED.UFPR; 2015.

MCCORMAC, J. Topografia. 5º Edição. Editora LTC. Rio de Janeiro , 2010

MIKHAIL E.M, GRACIE G. Analysis and adjustment of survey measurements. New York: Van Nostrand; 1981.

MORETTIN, L. G. - Estatística básica: probabilidade e inferência, volume único. São Paulo: Pearson; c2010

VUOLO J. H. Fundamentos da teoria de erros. São Paulo: Blucher; 1992.

Sites

<https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability>

<https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability/probability-library>

<https://www.gnu.org/software/octave/>

<https://octave.sourceforge.io/symbolic/>